Têm-se produzido três tipos de indícios quase empíricos a favor de PD: 1) O mero facto de ainda não se ter refutado uma asserção tão poderosa constitui algum indício da sua verdade; 2) Alguns casos particulares de PD foram verificados. 3) As consequências de PD no domínio da teoria descritiva dos conjuntos são tão plausíveis e coerentes que elas dão plausibilidade ao princípio que as implica.

De facto, num culminar dum esforço de investigação, foi demonstrado em meados da década de oitenta que PD é consequência da existência dum certo cardinal inacessível!

Mais recentemente (1994), W. Hugh Woodin escreveu:

> «Há escassos indícios *a priori* de que PD é um axioma plausível ou mesmo de que é consistente. No entanto, a teoria que se segue de PD é tão rica que, *a posteriori*, o axioma é consistente e verdadeiro. Esta é uma importante lição. Os axiomas não necessitam ser verdadeiros *a priori*.»

Termino, no entanto, com uma nota baixa. Ao contrário do que Gödel esperava, estas investigações ainda não lançaram uma luz definitiva sobre a hipótese do contínuo. Com efeito, sabe-se que os axiomas até agora propostos nem demonstram nem refutam essa hipótese. *Ver também* TEOREMA DE CANTOR, AXIOMA DA EXTENSIONALIDADE, PRINCÍPIO DA ABSTRACÇÃO, PARADOXO DE RUSSELL, PRINCÍPIO DO CÍRCULO VICIOSO, TEORIA DOS TIPOS, CÁLCULO DE PREDICADOS, QUANTIFICADOR, CLASSE, *NEW FOUNDATIONS,* AXIOMA DO INFINITO, AXIOMA DA ESCOLHA, AXIOMA DA FUNDAÇÃO, PROTO-ELEMENTO, CARDINAL, ORDINAL, BOA ORDEM, RECORRÊNCIA TRANSFINITA, HIPÓTESE DO CONTÍNUO, TEOREMA DA INCOMPLETUDE DE GÖDEL. FF

Boolos, G. 1971. The Iterative Conception of a Set. *Journal of Philosophy* 68: 215–232. Reimpresso in *Philosophy of Mathematics.* Putnam, H. e Benacerraf, P., orgs. Cambridge: Cambridge University Press, 1983.

Cantor, G. 1896. *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers.* Trad. P. Jourdain. Nova Iorque: Dover Publications, 1955.

Cohen, P. 1966. Teoria dos Conjuntos e a Hipótese do Contínuo. Trad. M. S. Lourenço, in *O Teorema de Gödel e a Hipótese do Contínuo.* Lisboa: Gulbenkian, 1979.

Ferreira, F. 1998. Teoria dos Conjuntos: Uma Vista. *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática* 38: 29–47.

Gödel, K. 1990. *Collected Works, vol. II.* Org. S. Feferman et al. Oxford: Oxford University Press.

Hallett, M. 1984. *Cantorian Set Theory and Limitation of Size.* Oxford: Claredon Press.

Kunen, K. 1980. *Set Theory. An Introduction to Independence Proofs*. Amesterdão: North-Holland.

Maddy, P. 1988a. Believing the Axioms I. *Journal of Symbolic Logic* 53: 481–511.

Maddy, P. 1988b. Believing the Axioms II. *Journal of Symbolic Logic* 53: 736–764.

Maddy, P. 1990. *Realism in Mathematics*. Oxford: Clarendon Press, Cap. 4.

van Dalen, D. 1972. Set Theory from Cantor to Cohen. In *Sets and Integration.* Groningen: Wolters-Noordhoff.

Zermelo, E. 1908. Investigations in the Foundations of Set Theory I. In J. van Heijenoort, org., *From Frege to Gödel.* Cambridge, MA: Harvard University Press, 1967.

teoria dos modelos *Ver* MODELOS, TEORIA DOS.

teoria dos tipos No artigo em que expôs pela primeira vez a teoria dos tipos (Russell 1908), Russell define o PRINCÍPIO DO CÍRCULO VICIOSO, que estipula que nenhuma totalidade pode conter elementos definidos em termos de si própria. A teoria simples dos tipos procura resolver os problemas levantados por uma das formas possíveis de violação deste princípio.

Segundo Russell, uma função denota «ambiguamente» uma certa totalidade, a dos valores que pode assumir (e portanto também a dos seus argumentos), pelo que não é bem definida se estes valores não estiverem previamente bem definidos (Russell e Whitehead 1962). Ou seja, é a função que pressupõe os seus valores e não o contrário, pelo que a totalidade destes não pode incluir elementos cuja definição envolva a função, sob pena de se violar o princípio do círculo vicioso. Logo, $\phi(\phi)$ (ou $\phi(\phi x)$, na notação de Russell), em que ϕ designa uma função proposicional, não é uma proposição falsa mas sim desprovida de sentido visto que não existe nada que seja o valor de ϕ para o argumento ϕ. Assim, nem todos os argumentos são legítimos para uma função proposicional dada, sendo necessário delimitar o conjunto dos seus «argumentos possíveis» através da especificação de um «domínio de sentido», ou tipo lógico, que Russell define como a colecção de argumentos para os quais a função assume valores. Uma vez que uma função proposicional pode por sua vez ser argumento de outra função proposicional, a definição destas colecções de argumentos fará toda a função corresponder a um tipo determinado, a acrescentar àquele que corresponde aos indivíduos.

Uma função proposicional faz parte da totalidade das funções proposicionais que utilizam argumentos de um certo tipo, e esta totalidade não pode, como acabámos de ver, ser pressuposta na definição de um argumento desse tipo; se este argumento for uma função proposicional, o mesmo se pode dizer desta função relativamente aos seus argumentos, e assim sucessivamente. Mas isto significa que a divisão em «domínios de sentido» ou tipos constitui forçosamente uma hierarquia, em que cada nível se distingue dos restantes pelas totalidades que se podem legitimamente pressupor na definição dos seus membros (ou pela ausência de tais totalidades, no caso dos indivíduos) e que portanto uma função proposicional só pode ter argumentos de tipo mais baixo que o seu.

Se designarmos por i o tipo que corresponde aos indivíduos e por (i) o tipo que corresponde às funções proposicionais unárias com argumentos de tipo i, podemos representar os restantes tipos por (i, i) (funções proposicionais binárias que apenas tomam indivíduos como argumentos), $((i), i)$ (funções proposicionais binárias cujo primeiro argumento é de tipo (i) e o segundo de tipo i), etc.

Teoria ramificada dos tipos A esta estratificação vem sobrepor-se outra que é determinada pela necessidade de ter em conta novas formas sob as quais podem aparecer ilegitimamente totalidades como argumentos de funções proposicionais. Ou seja, segundo Russell a teoria simples dos tipos não é ainda suficiente para eliminar todas as transgressões possíveis do princípio do círculo vicioso, sendo necessária uma sofisticação da teoria através da introdução de uma divisão em ordens. A teoria resultante ficou conhecida como teoria ramificada dos tipos.

Considere-se as funções proposicionais 1) $\phi_{(i)}(x_i)$ e 2) $\forall \phi_i \, \phi_{((i), i)}(\phi_{(i)}, x_i)$, em que os índices estão de acordo com o que ficou estipulado no que respeita à notação na teoria simples dos tipos. Ambas as funções proposicionais correspondem a predicados unários de indivíduos, mas 2 envolve a totalidade das funções $\phi_{(i)}$, quer dizer, a totalidade dos valores possíveis para a variável $\phi_{(i)}$. Esta totalidade não pode integrar todas as funções de tipo (i), porque no caso contrário 2 poderia ser um desses valores e isso seria uma violação do princípio do círculo vicioso análoga àquela que considerámos anteriormente. Surge assim a necessidade de uma divisão complementar por ordens, após a qual 1 será de ordem diferente de 2.

Russell define proposições e funções proposicionais de primeira ordem como aquelas em que não ocorrem funções (isto é, símbolos de função) como VARIÁVEIS aparentes; estas funções formam uma totalidade bem definida pelo que podem aparecer como variáveis aparentes em proposições e funções proposicionais de ordem superior, de entre as quais as proposições e funções proposicionais de segunda ordem são aquelas em que não ocorrem variáveis aparentes de ordem superior a 1; e, em geral, define proposições e funções proposicionais de ordem n como aquelas em que apenas intervêm variáveis aparentes de ordem igual ou inferior a n-1. Uma função proposicional é predicativa se, sendo n a ordem mais alta de algum dos seus argumentos, a função é de ordem $n + 1$ (Russell 1908, nomeadamente §IV).

Assim 1 e 2, sendo ambas de tipo 1, são de ordens diferentes: em 1 não ocorrem variáveis ligadas de qualquer espécie, logo, é de ordem 1, e é predicativa porque é de uma ordem imediatamente superior à do seu argumento (só os tipos acima do dos indivíduos estão sujeitos à divisão por ordens. O tipo mais baixo na hierarquia coincide com a ordem 0, a mais baixa); em 2 ocorre uma variável ligada de ordem 1, logo, é de ordem 2; mas como o seu argumento é de ordem 0 é impredicativa.

A teoria dos tipos permite a resolução dos PARADOXOS conhecidos na época de Russell (embora levante novos problemas quer quanto às limitações excessivas que introduz e que afectam a formulação, e *a fortiori* a demonstração, de alguns teoremas da matemática, quer quanto ao seu acordo com as nossas intuições lógicas). Após a resolução do paradoxo com o seu nome, Russell mostra, nos *Principia Mathematica,* como a teoria simples dos tipos resolve outro paradoxo semelhante; quanto à teoria ramificada, os paradoxos de Berry e de Richard, por exemplo, são resolvidos pela divisão em ordens, que delimitam o âmbito dos «nomes de inteiro» de Berry e das «definições de números reais» de Richard. O que parecia existir de comum nos paradoxos era alguma forma de circularidade cuja reconstituição se impediria quando, ao hierarquizar as entidades lógicas, deixasse de ser possível o recurso indiscriminado a totalidades (de indivíduos, de propriedades de indivíduos, de relações, etc.). Em qualquer dos casos o princípio fundamental que preside à construção da teoria dos tipos, quer na sua «forma simples» quer na «ramificada», é o princípio do círculo vicioso. *Ver também* PRINCÍPIO DO CÍRCULO VICIOSO, PARADOXO, VARIÁVEL, FUNÇÃO PROPOSICIONAL. FM

teoria formal *Ver* SISTEMA FORMAL.

teorias axiomáticas O sentido original do termo axioma (do grego αξιωμα) era o de uma proposição verdadeira que ocupa um lugar de destaque num sistema de proposições. Para Aristóteles, os axiomas devem ter um carácter de evidência imediata, constituindo por isso o fundamento de toda a ciência. Esta concepção de axioma visava proposições como as expressas pelas frases «Duas coisas iguais a uma terceira são iguais entre si» ou «O todo é maior que a parte». A terminologia tradicional foi-se estabelecendo a partir desta concepção, associando aos axiomas as características de princípio geral, de evidência imediata e de indemonstrabilidade. Outros tipos notáveis de proposições eram os teoremas, entendidos como proposições que carecem de demonstração, e os postulados, entendidos como proposições indemonstráveis mas sem o carácter evidente dos axiomas.

Actualmente não se exige que os axiomas sejam evidentes nem, em sentido estrito, verdadeiros, e a propriedade de ser demonstrável é ela própria relativa a um conjunto particular de axiomas (*ver* DEMONSTRAÇÃO). Desapareceu portanto a distinção tradicional entre postulado e axioma. Os axiomas «postulam-se» com o objectivo de identificar ou de estabelecer as hipóteses independentes num domínio teórico particular. Em vez de dizer que não são demonstráveis (em geral) é preferível dizer que não são demonstrados (num contexto particular), porque nada impede que uma proposição demonstrável num dado contexto possa ser escolhida noutro como hipótese irredutível, quer dizer, como axioma.

Axiomatizar uma teoria é escolher um conjunto de proposições que devem funcionar como hipóteses do raciocínio nessa teoria mas que não são elas próprias resultados do raciocínio no interior da teoria. As noções de axiomatização e de formalização andam frequentemente associadas, mas a axiomatização de uma teoria não pressupõe a sua formalização. A geometria euclidiana só recentemente foi formalizada, mas os seus axiomas estavam formulados desde o início na linguagem natural. *Ver também* TEOREMA, LINGUAGEM FORMAL, SISTEMA FORMAL. FM

teorias causais da referência *Ver* REFERÊNCIA, TEORIAS DA.